Analyse der Validität der ‘Rule of Half’ zur Ermittlung der Änderung der Konsumentenrente für gekoppelte Verkehrsnachfragemodelle

Dr.-Ing. Christian Winkler
Institut für Verkehrsforschung
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR)

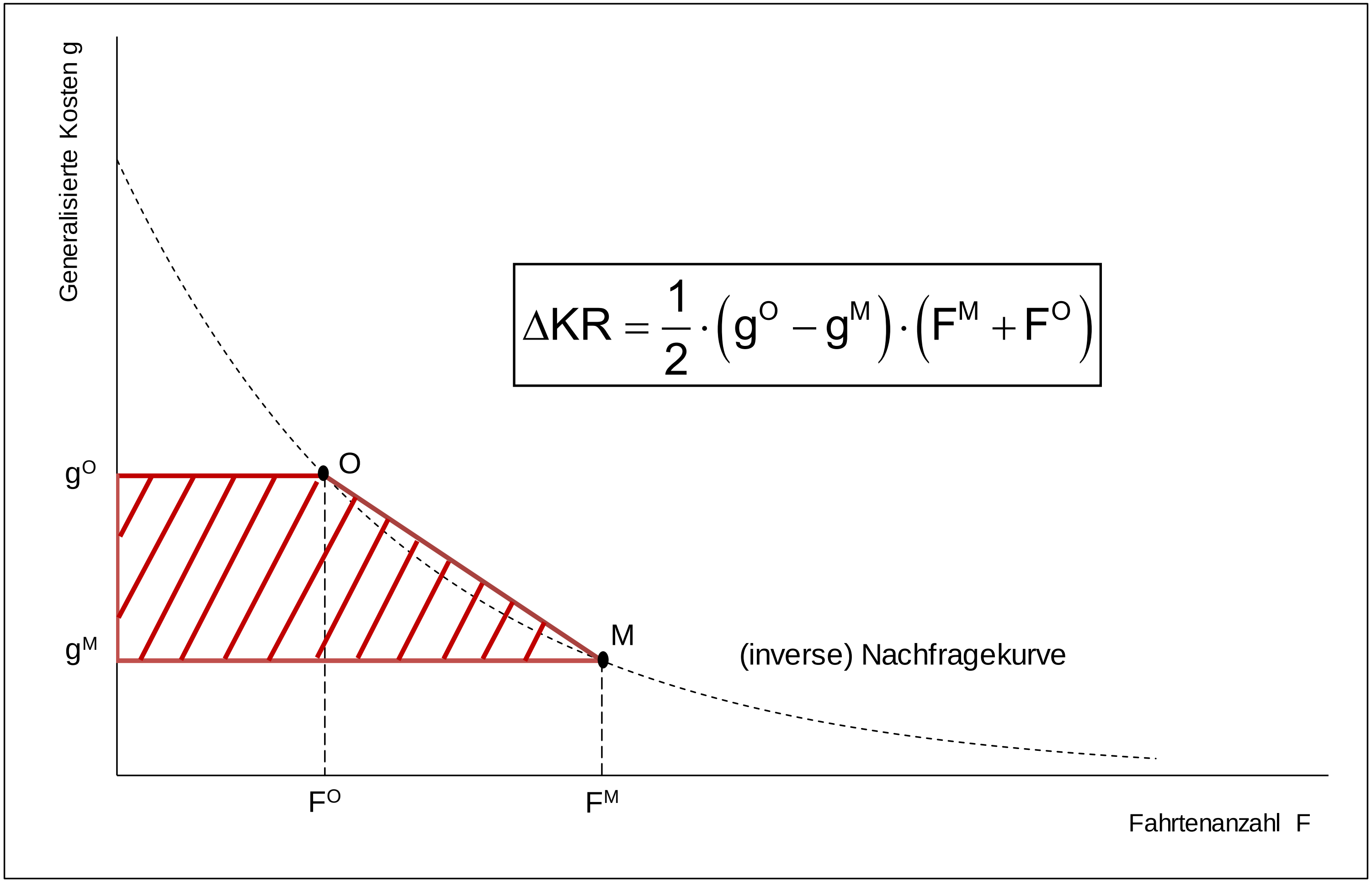
DLR

Bewertungsverfahren

- Investitionsmaßnahmen im Verkehrswesen müssen i.d.R. auf volkswirtschaftliche Vorteilhaftigkeit geprüft werden
- Grund: Knappheit öffentlicher Finanzmittel
- standardisierte Bewertungsverfahren in Deutschland: EWS, STABW, BVWP
- Nutzen-Kosten-Analyse maßgebend
- grundsätzliche Berechnung lautet:

		Nutzen						Kosten
ökonomische Gesamtwirkung	=	**Änderung des monetären internen Nutzens**	+	Änderung in den Betreiberkosten und Einnahmen	+	Änderung der externen Kosten	-	Investitions-kosten

Ansatz der „Rule of Half“



Verkehrsnachfragemodelle

- Grundlage für Bewertung stellt Verkehrsmengengerüst dar
- Quantifizierung der Verkehrsnachfrage für Mit- und Ohnefall
- Nutzung von Verkehrsnachfragemodellen
- zahlreiche unterschiedliche Ansätze

- **Gekoppelte Modelle** (mit Randsummenbedingungen) hier im Fokus
- aber auch Logit-Modell von Bedeutung

Gekoppeltes Modell der Zielwahl und Logit-Modell

- Gekoppeltes Modell für die Zielwahl:

$$F_{ij} = f\left(g_{ij}\right) \cdot fq_i \cdot fz_j$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_j F_{ij} &= Q_i \\ \sum_i F_{ij} &= Z_j \end{aligned}\right\} \text{RSB}$$

- Einhaltung von Randbedingungen
- sehr flexibel

Gekoppeltes Modell der Zielwahl und Logit-Modell

- Gekoppeltes Modell für die Zielwahl:

$$F_{ij} = f\left(g_{ij}\right) \cdot fq_i \cdot fz_j$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j F_{ij} = Q_i \\ \\ \sum_i F_{ij} = Z_j \end{array}\right\} \text{RSB}$$

- Einhaltung von Randbedingungen
- sehr flexibel

- Logit-Modell für die Zielwahl:

$$F_{ij} = P_{ij} \cdot V$$

$$= \frac{e^{u_{ij}}}{\sum_{i'} \sum_{j'} e^{u_{i'j'}}} \cdot V$$

- keine Einhaltung mehrerer Randbedingungen
- Zufallsnutzenmaximierung

gekoppeltes Logit-Modell

- Definition einer spezifischen Nutzenfunktion
- Berücksichtigung von Pseudo-Potentialen

$$u_{ij} = -g_{ij} + \theta_i + \tau_j$$

- gekoppeltes Logit-Modell lautet:

$$F_{ij} = \frac{e^{\left(-g_{ij} + \theta_i + \tau_j\right)}}{\sum_{i'} \sum_{j'} e^{\left(-g_{i'j'} + \theta_{i'} + \tau_{j'}\right)}} \cdot V$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_j F_{ij} &= Q_i \\ \sum_i F_{ij} &= Z_j \end{aligned}\right\} \text{RSB}$$

Berechnungsbeispiel – gekoppeltes Logit-Modell

- synthetisches Beispiel zur Veranschaulichung:
  - fünf Verkehrszellen
  - quell- und zielseitig unelastische RSB
  - Zeit- und Kostenaufwände
  - Value of Time von 10 Euro pro Stunde

Ohnefall

Generalisierte Kosten [Euro]

gij	1	2	3	4	5
1	4,08	3,25	6,25	5,50	3,25
2	4,08	4,08	4,78	4,58	5,00
3	6,25	4,37	4,08	4,00	4,00
4	5,50	4,58	4,42	4,08	4,08
5	4,50	6,33	4,00	3,25	3,67

Mitfall

Generalisierte Kosten [Euro]

gij	1	2	3	4	5
1	4,08	3,25	6,25	3,25	3,25
2	4,08	4,08	4,78	4,58	5,00
3	6,25	4,37	4,08	4,00	4,00
4	3,25	4,58	4,42	4,08	4,08
5	4,50	6,33	4,00	3,25	3,67

Berechnungsbeispiel – gekoppeltes Logit-Modell

- Berechnung der Fahrten mittels gekoppeltem Logit-Modell - **Ohnefall**

Fij	1	2	3	4	5		Qi-Ist	Qi-Soll	θi
1	3,03	32,35	1,93	1,38	11,31		50,00	50,00	2,611
2	9,81	45,52	27,14	11,17	6,36		100,00	100,00	3,785
3	0,44	13,46	21,46	7,86	6,79		50,00	50,00	2,850
4	2,30	26,68	37,85	17,80	15,37		100,00	100,00	3,751
5	9,42	6,99	86,62	61,79	35,18		200,00	200,00	4,162
						500,00	**500,00**	**500,00**	
Zj-Ist	25,00	125,00	175,00	100,00	75,00	**500,00**			
Zj-Soll	25,00	125,00	175,00	100,00	75,00	**500,00**			
τj	2,581	4,116	4,299	3,211	3,065				

Berechnungsbeispiel – gekoppeltes Logit-Modell

- Berechnung der Fahrten mittels gekoppeltem Logit-Modell - **Ohnefall**

Fij	1	2	3	4	5		Qi-Ist	Qi-Soll	θi
1	3,03	32,35	1,93	1,38	11,31		50,00	50,00	2,611
2	9,81	45,52	27,14	11,17	6,36		100,00	100,00	3,785
3	0,44	13,46	21,46	7,86	6,79		50,00	50,00	2,850
4	2,30	26,68	37,85	17,80	15,37		100,00	100,00	3,751
5	9,42	6,99	86,62	61,79	35,18		200,00	200,00	4,162
						500,00	**500,00**	**500,00**	
Zj-Ist	25,00	125,00	175,00	100,00	75,00	**500,00**			
Zj-Soll	25,00	125,00	175,00	100,00	75,00	**500,00**			
τj	2,581	4,116	4,299	3,211	3,065				

$$F_{11} = P_{11} \cdot V$$

$$= \frac{e^{\left(-4{,}08\,\text{Euro} + 2{,}611\,\text{Euro} + 2{,}581\,\text{Euro}\right)_{11}}}{\sum_{i'}\sum_{j'} e^{\left(-g_{i'j'} + \theta_{i'} + \tau_{j'}\right)}} \cdot 500\ \text{Fahrten}$$

$$= 3{,}03\ \text{Fahrten}$$

Berechnungsbeispiel – gekoppeltes Logit-Modell

- Berechnung der Fahrten mittels gekoppeltem Logit-Modell - **Mitfall**

Fij	1	2	3	4	5		Qi-Ist	Qi-Soll	θi
1	1,45	27,93	1,57	9,62	9,43		50,00	50,00	2,386
2	5,90	49,43	27,67	10,33	6,67		100,00	100,00	3,790
3	0,26	14,29	21,39	7,10	6,96		50,00	50,00	2,833
4	11,59	25,58	34,07	14,53	14,23		100,00	100,00	3,632
5	5,80	7,77	90,30	58,41	37,72		200,00	200,00	4,190
						500,00	**500,00**	**500,00**	
Zj-Ist	25,00	125,00	175,00	100,00	75,00	**500,00**			
Zj-Soll	25,00	125,00	175,00	100,00	75,00	**500,00**			
τj	2,068	4,194	4,313	3,128	3,107				

Berechnungsbeispiel – gekoppeltes Logit-Modell

- Änderungen zwischen Ohne- und Mitfallberechnung

ΔFij	1	2	3	4	5		ΔQi-Ist	ΔQi-Soll	Δθi
1	-1,58	-4,42	-0,37	8,24	-1,88		0,00	0,00	-0,224
2	-3,90	3,91	0,53	-0,84	0,31		0,00	0,00	0,005
3	-0,18	0,83	-0,07	-0,75	0,17		0,00	0,00	-0,018
4	9,29	-1,10	-3,78	-3,27	-1,14		0,00	0,00	-0,120
5	-3,62	0,77	3,68	-3,37	2,54		0,00	0,00	0,027
						0,00	**0,00**	**0,00**	
ΔZj-Ist	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**0,00**			
ΔZj-Soll	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**0,00**			
Δτj	-0,513	0,078	0,014	-0,083	0,042				

„Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- „Rule of Half“ als Näherung des Integrals der Verkehrsnachfragefunktion
- Beachtung aller nachfragebeeinflussenden Variablen:

$$\Delta KR^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j \left(F_{ij}^O + F_{ij}^M\right) \cdot \left(\left(g_{ij}^O - \theta_i^O - \tau_j^O\right) - \left(g_{ij}^M - \theta_i^M - \tau_j^M\right)\right)$$

- angewendet aber:

$$\Delta KR = \frac{1}{2} \cdot \left(g^O - g^M\right) \cdot \left(F^M + F^O\right)$$

- Ansätze liefern unterschiedliche Ergebnisse

„Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Beispielrechnung:

- Ergebnis **mit** Beachtung der Pseudo-Potentiale ist:

ΔKR*	1	2	3	4	5
1	-1,65	-4,43	-0,37	10,69	-1,89
2	-3,99	3,91	0,53	-0,84	0,31
3	-0,19	0,83	-0,07	-0,76	0,17
4	11,23	-1,10	-3,78	-3,28	-1,14
5	-3,70	0,77	3,69	-3,38	2,54

4,13 Euro

- Ergebnis **ohne** Beachtung der Pseudo-Potentiale ist:

ΔKR	1	2	3	4	5
1	0,00	0,00	0,00	12,38	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	15,62	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

28,00 Euro

„Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Beispielrechnung:

- Ergebnis **mit** Beachtung der Pseudo-Potentiale ist:

ΔKR*	1	2	3	4	5
1	-1,65	-4,43	-0,37	10,69	-1,89
2	-3,99	3,91	0,53	-0,84	0,31
3	-0,19	0,83	-0,07	-0,76	0,17
4	11,23	-1,10	-3,78	-3,28	-1,14
5	-3,70	0,77	3,69	-3,38	2,54

4,13 Euro

$\Delta KR^* \neq \Delta KR$

- Ergebnis **ohne** Beachtung der Pseudo-Potentiale ist:

ΔKR	1	2	3	4	5
1	0,00	0,00	0,00	12,38	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	15,62	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

28,00 Euro

Analyse der Validität der „Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Hypothese: Beachtung von Pseudo-Potentialen führt zu fehlerhaftem Nutzenergebnis

- gesucht ist Nutzenänderung infolge Änderung der Generalisierten Kosten
- detaillierte Betrachtung des Integrals notwendig
- Zerlegung des Integrals nach einzelnen Einflussgrößen

Analyse der Validität der „Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Integral des gekoppelten Logit-Modells zerlegbar in:

$$\Delta KR^{*} = -\int_{g^O}^{g^M} \sum_i \sum_j F_{ij}\, dg_{ij} + \int_{\theta^O}^{\theta^M} \sum_i \sum_j F_{ij}\, d\theta_i + \int_{\tau^O}^{\tau^M} \sum_i \sum_j F_{ij}\, d\tau_j$$

- Vereinfachung möglich (mit : $\sum_j F_{ij} = Q_i$ und $\sum_i F_{ij} = Z_j$)

$$\Delta KR = \Delta KR^{*} - \int_{\theta^O}^{\theta^M} \sum_i Q_i\, d\theta_i - \int_{\tau^O}^{\tau^M} \sum_j Z_j\, d\tau_j$$

- bei unelastischen Randsummenbedingungen gilt:

Q_i = konst. Z_j = konst.

Analyse der Validität der „Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Einsetzen ergibt:

$$\Delta KR = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j \left(F_{ij}^O + F_{ij}^M\right) \cdot \left(\left(g_{ij}^O - \theta_i^O - \tau_j^O\right) - \left(g_{ij}^M - \theta_i^M - \tau_j^M\right)\right) - Q_i \cdot \left(\theta_i^M - \theta_i^O\right) - Z_j \cdot \left(\tau_j^M - \tau_j^O\right)$$

Analyse der Validität der „Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Einsetzen ergibt:

$$\Delta KR = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j \left(F_{ij}^O + F_{ij}^M\right) \cdot \left(\left(g_{ij}^O - \theta_i^O - \tau_j^O\right) - \left(g_{ij}^M - \theta_i^M - \tau_j^M\right)\right)} - Q_i \cdot \left(\theta_i^M - \theta_i^O\right) - Z_j \cdot \left(\tau_j^M - \tau_j^O\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j \left(F_{ij}^O + F_{ij}^M\right) \cdot \left(g_{ij}^O - g_{ij}^M\right) + \frac{1}{2} \cdot \sum_i \left(Q_i^O + Q_i^M\right) \cdot \left(\theta_i^M - \theta_i^O\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sum_j \left(Z_j^O + Z_j^M\right) \cdot \left(\tau_j^M - \tau_j^O\right)$$

Analyse der Validität der „Rule of Half" für gekoppelte Modelle

- Einsetzen ergibt:

$$\Delta KR = \frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_j\left(F_{ij}^O + F_{ij}^M\right)\cdot\left(\left(g_{ij}^O - \theta_i^O - \tau_j^O\right) - \left(g_{ij}^M - \theta_i^M - \tau_j^M\right)\right) - Q_i\cdot\left(\theta_i^M - \theta_i^O\right) - Z_j\cdot\left(\tau_j^M - \tau_j^O\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_j\left(F_{ij}^O + F_{ij}^M\right)\cdot\left(g_{ij}^O - g_{ij}^M\right) + \boxed{\frac{1}{2}\cdot\sum_i\left(Q_i^O + Q_i^M\right)\cdot\left(\theta_i^M - \theta_i^O\right)} = \sum_i Q_i\cdot\left(\theta_i^M - \theta_i^O\right)$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\sum_j\left(Z_j^O + Z_j^M\right)\cdot\left(\tau_j^M - \tau_j^O\right)$$

Analyse der Validität der „Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Einsetzen ergibt:

$$\Delta KR = \frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_j \left(F_{ij}^O+F_{ij}^M\right)\cdot\left(\left(g_{ij}^O-\theta_i^O-\tau_j^O\right)-\left(g_{ij}^M-\theta_i^M-\tau_j^M\right)\right)-Q_i\cdot\left(\theta_i^M-\theta_i^O\right)-Z_j\cdot\left(\tau_j^M-\tau_j^O\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_j\left(F_{ij}^O+F_{ij}^M\right)\cdot\left(g_{ij}^O-g_{ij}^M\right)+\boxed{\frac{1}{2}\cdot\sum_i\left(Q_i^O+Q_i^M\right)\cdot\left(\theta_i^M-\theta_i^O\right)} = \sum_i Q_i\cdot\left(\theta_i^M-\theta_i^O\right)$$

$$+\boxed{\frac{1}{2}\cdot\sum_j\left(Z_j^O+Z_j^M\right)\cdot\left(\tau_j^M-\tau_j^O\right)} = \sum_j Z_j\cdot\left(\tau_j^M-\tau_j^O\right)$$

DLR

Analyse der Validität der „Rule of Half“ für gekoppelte Modelle

- Einsetzen ergibt:

$$\Delta KR = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_j\left(F_{ij}^{O}+F_{ij}^{M}\right)\cdot\left(\left(g_{ij}^{O}-\theta_i^{O}-\tau_j^{O}\right)-\left(g_{ij}^{M}-\theta_i^{M}-\tau_j^{M}\right)\right)}\cancel{-Q_i\cdot\left(\theta_i^{M}-\theta_i^{O}\right)}\cancel{-Z_j\cdot\left(\tau_j^{M}-\tau_j^{O}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_j\left(F_{ij}^{O}+F_{ij}^{M}\right)\cdot\left(g_{ij}^{O}-g_{ij}^{M}\right)+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\sum_i\left(Q_i^{O}+Q_i^{M}\right)\cdot\left(\theta_i^{M}-\theta_i^{O}\right)}$$

$$\cancel{+\frac{1}{2}\cdot\sum_j\left(Z_j^{O}+Z_j^{M}\right)\cdot\left(\tau_j^{M}-\tau_j^{O}\right)}$$

- somit ergibt sich:

$$\boxed{\Delta KR = \frac{1}{2}\cdot\sum_i\sum_j\left(F_{ij}^{O}+F_{ij}^{M}\right)\cdot\left(g_{ij}^{O}-g_{ij}^{M}\right)}$$

Fazit

- zielseitig-gekoppeltes Verkehrsnachfragemodell als Logit-Modell formulierbar
- Ansatz auch auf weitere Dimensionen der Verkehrsnachfrage problemlos erweiterbar
- Konzept der „Rule of Half“ ohne Pseudo-Potentiale liefert auch für gekoppelte Verkehrsnachfragemodelle Näherung der Änderung der Konsumentenrente
- grundsätzlich aber Einschränkungen der „Rule of Half“ zu beachten

Dr.-Ing. Christian Winkler
Institut für Verkehrsforschung
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR)
Mail: christian.winkler@dlr.de
Tel.: 030-67055-7951

DLR